

POMORSKA LIGA ZADANIOWA ZDOLNI Z POMORZA
Konkurs dla uczniów szkół ponadpodstawowych i ponadgimnazjalnych
województwa pomorskiego w roku szkolnym 2020/2021

Etap II – powiatowy
Przedmiot: MATEMATYKA

Instrukcja dla ucznia

Zanim przystąpisz do rozwiązywania testu, przeczytaj uważnie poniższą instrukcję.

1. Arkusz testowy zawiera **5** zadań.
2. Za zadania z arkusza można uzyskać łącznie 50 punktów.
3. Rozwiązania zadań przedstaw w takiej formie, żeby można było odczytać je bez problemu.
4. Wszystkie rozwiązania zadań zamieść w jednym pliku o nazwie imię_nazwisko_miejscowość (w formacie *.doc, *.docx, *.pdf) i prześlij na adres mailowy: matematyka_plz_Pp@odn.slupsk.pl.

Dopuszczalny jest odręczny zapis rozwiązań. Pisz wtedy czytelnie. Rozwiązania zapisane odręcznie, należy zeskanować do jednego pliku i zapisać w formacie pdf. Pliki w postaci zdjęć należy wkleić do pliku tekstowego (w formacie *.doc, *.docx).

Życzymy powodzenia!

Zadanie 1. (0-10 p.)

a) Dana jest funkcja $f(x) = 2021ax^2 + bx + 10$, gdzie:

$$a = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{5}\right) \left(1 - \frac{2}{7}\right) \left(1 - \frac{2}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{2015}\right) \left(1 - \frac{2}{2017}\right) \left(1 - \frac{2}{2019}\right) \left(1 - \frac{2}{2021}\right),$$

natomiast b jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 21 \\ -x + y + z = 9, \text{ gdzie } x, y, z \in \langle -15; 15 \rangle. \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Wyznacz najmniejszą wartość w dla tej funkcji. Zapisz swoje obliczenia.

b) Liczby w i b są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego zbieżnego. Oblicz sumę tego ciągu. Zapisz swoje obliczenia.

Zadanie 2. (0-10 p.)

a) Dla jakich wartości a i m szósty wyraz rozwinięcia dwumianu

$$\left(\sqrt{2^{\log(10-3^a)}} + \sqrt[5]{2^{(a-2)\log 3}}\right)^m,$$

jest równy 21, jeżeli wiadomo, że współczynniki drugiego, trzeciego i czwartego wyrazu rozwinięcia są odpowiednio pierwszym, trzecim i piątym wyrazem ciągu arytmetycznego. Zapisz swoje obliczenia.

b) Zaznacz w układzie współrzędnych punkty o współrzędnych całkowitych, spełniających warunek:

$$\begin{cases} y \geq |ax + m| - 3 \\ y < -x + m \\ y < m + 3 \end{cases}$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród tak zaznaczonych punktów o współrzędnych $(x; y)$ wybierzemy 2 dowolne punkty, dla których $|x| < y$?

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 3. (0-10 p.)

Dany jest ostrosłupa prawidłowy czworokątny ABCDS. Punkt S jest wierzchołkiem ostrosłupa, a punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD jego podstawy. Krawędź podstawy i wysokość tego ostrosłupa mają taką samą długość równą 1. Płaszczyzna przechodząca przez punkty K i L przecina krawędzie boczne BS i CS ostrosłupa odpowiednio w punktach N oraz M. Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że jest ono dwa razy większe od pola czworokąta BCMN.

Zapisz swoje obliczenia.

Zadanie 4. (0-10 p.)

a) Liczby $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź sumy

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

oblicz iloczyn $I = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$. Wynik uzależnij od S, T i n .

Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

b) Przeprowadź dyskusję, czy ustalona zależność jest prawdziwa dla dowolnego ciągu geometrycznego (a_n) i dowolnej liczby n wyrazów. Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.

Zadanie 5. (0-10 p.)

a) Wyznacz wszystkie liczby całkowite spełniające równanie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^{2019}$$

Przedstaw swoje obliczenia.

b) Przeprowadź dyskusję rozwiązań równania: $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot 2^n$ w zależności od $n \in \mathbb{N}$.
Przedstaw i zapisz tok swojego rozumowania i obliczenia.