Jerzy Paczkowski

Matematyka – jak wygrać z Królową Nauk?

Siódma edycja Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* organizowana przez Pomorski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli w Słupsku za nami. Kończy się projekt, a z nim wieloletnie spotkania z uczniami, którzy wykazywali się sporą wiedzą matematyczną i chęcią pokonywania barier, jakie stwarzały wcale nie tak łatwe zadania.

Wczytując się w rozwiązania zadań, jak i w uczniowskie propozycje zadań własnych, można było w ciągu tych 7 lat obserwować rozwój myślenia matematycznego uczniów – zwłaszcza tych, którzy wielokrotnie brali udział w konkursie. „Spotkania z matematyką" były dla nich kolejnym etapem weryfikacji swoich umiejętności matematycznych, kolejną przygodą. Wszyscy uczestnicy konkursu matematycznego mogli wykazać się nie tylko znajomością teorii i biegłością matematyczną, ale również intuicją i praktycznym podejściem do zadań. Dało się to zauważyć w tegorocznej edycji PLZ już na etapie kwalifikacyjnym, gdy do dalszego etapu zakwalifikowała się duża liczba uczniów, aby w kolejnych etapach pokonać innych.

Tabela 1. Uczestnicy konkursu PLZ 2022/2023 z matematyki

	Etap szkolny	Etapu powiatowy*)	Etapu wojewódzki*)	Etap wojewódzki Nadesłane zadanie własne
Szkoły podstawowe	2143	102 (na 147)	47 (na 49)	43
Szkoły ponadpodstawowe	1288	66 (na 96)	46 (na 49)	32

*) zapis 102 (na 147) informuje, że do etapu powiatowego zakwalifikowano 147 uczniów, a zadania rozwiązywało na tym etapie 102 uczniów; podobne znaczenie w pozostałych zapisach.

Jak widać z tabeli, prawie 70% uczniów zakwalifikowanych do etapu powiatowego, nadesłało rozwiązania zadań, zamieszczonych na stronie internetowej. Na etapie powiatowym uczniowie nie byli ograniczeni czasem. Mogli kilkanaście dni poświęcić na rozwiązywanie przedstawionych zadań, mając dostęp do potrzebnych informacji z dziedziny matematycznej (w podręcznikach, w tablicach, w internecie). Przy czym w nadesłanych pracach niekoniecznie przedstawiano rozwiązania wszystkich zadań.

Z kolei prawie wszyscy uczniowie, zakwalifikowani do etapu wojewódzkiego, przystąpili do tego etapu. Natomiast znacząca grupa uczniów chciała zwiększyć swoje szanse i podwyższyć punktacje końcową etapu wojewódzkiego, nadsyłając propozycje zadań własnych z przykładowymi rozwiązaniami.

Przystępując do analizy wyników tegorocznej edycji konkursu, warto podkreślić, że na etapie powiatowym i wojewódzkim większość zadań była dwuczęściowa. Obie części (podpunkty a i b) albo stanowiły dwa odrębne zadania, bazujące na tej samej treści, albo też po rozwiązaniu zadania z podpunktu a, należało uzyskane informacje wykorzystać do rozwiązania podpunktu b zadania. Z założenia część pierwsza takiego zadania była łatwiejsza. Czyli dawała szansę rozwiązania choć części zadania.

Etap szkolny a zadania „praktyczne" i „szkolne"

Na etapie szkolnym w zestawie dla szkół podstawowych pojawiły się 3 zadania o charakterze praktycznym, których treść powinna być bliska uczniom – (1) wycieczka klasowa i jej koszty, (2) zakup gwóździ i wkrętów w ilościach określonych odpowiednimi stosunkami, (3) kostka sześcienna o objętości 125, z której z każdego naroża wyjęto kostki jednostkowe.

W pierwszym zadaniu uczniowie mogli źle zrozumieć treść zadania – potraktować całkowitą wpłatę 92 złotych od 1 ucznia jako DOPŁATĘ. Ale całe rozumowanie prowadzące do obliczenia kosztów wycieczki klasowej byłoby podobne do modelowego. Dlatego należało ocenić wysoko, uwzględniając i akceptując w punktacji złą interpretację treści wynikające ze złego zrozumienia.

Na etapie szkolnym w zestawie dla szkół ponadpodstawowych 3 zadania były „szkolne" – (1) wykorzystanie własności logarytmu i rozwiązanie równania kwadratowego, (2) losowanie ponumerowanych kul z 2 pojemników, (4) ostrosłup, który przecięto płaszczyzną na dwie części.

Natomiast w zadaniu dla szkół ponadpodstawowych o podzielności pewnego wyrażenia przez 64, gdy występujące w nim zmienne należały do zbioru liczb naturalnych, w schemacie oceniania podano częściowe modelowe rozwiązania. Uczniowie mieli pokazać strategię rozumowania, uwzględniając 3 przypadki wartości zmiennych (parzyste, nieparzyste). Niekoniecznie uwzględniając wszystkie przypadki i wyczerpując pełne rozwiązania. Za to mogli uzyskać maksymalną liczbę punktów.

Zadania na etapie powiatowym

Nadesłane rozwiązania zadań na etap powiatowy można już analizować zarówno pod kątem stopnia trudności, oryginalnych rozwiązań czy też popełnianych błędów w rozumowaniu.

Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 2. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych [PLZ 2022/2023 – etap powiatowy]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie powiatowym – 102 uczniów	99*) 0,92**) 0,95***)	92*) 0,77**) 0,85***)	99*) 0,59**) 0,61***)	87*) 0,56**) 0,65***)	87*) 0,32**) 0,38***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie powiatowym – 66 uczniów	66*) 0,80**) 0,80***)	57*) 0,71**) 0,83***)	57*) 0,64**) 0,74***)	57*) 0,71**) 0,82***)	55*) 0,61**) 0,73***)

*) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania
**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących
***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

Na podstawie liczby poprawnych rozwiązań można stwierdzić, że zadania nie sprawiły uczniom większych trudności. Ogólny poziom przedstawionych rozwiązań zadań był wysoki (średnia dla SP – 63 %, dla szkół ponadpodstawowych – 69 %).

Na etapie powiatowym dla uczniów szkół podstawowych trudnym okazało się zadanie 5. W zadaniu tym należało obliczyć pole powierzchni kolejnych kostek Mengera (czyli takich „dziurawych" sześcianów) – wskaźnik łatwości 0,38, gdy zadanie podjęło 87 uczniów. Wyjściową bryłą był pełny sześcian o krawędzi *a*, składający się z 27 „jednostkowych" kostek sześciennych, z którego wybierano kostki o krawędzi 1/3 *a*, potem 1/9 *a* i wreszcie 1/27 *a*. W ten sposób kolejny sześcian był coraz bardziej „dziurawy". I tu okazało się, jak operatywni mogą być uczniowie. Wielu z nich sięgnęło do gotowego wzoru na pole powierzchni kostki Mengera (do pobrania z angielskiej wersji Wikipedii).

Tak więc w przypadku zadania 5 dla szkół podstawowych o „dziurawej" kostce sześciennej pojawił się jakże istotny problem: *„Jak ocenić uczniowskie rozwiązania zadania 5*?" Czy premiować operatywność kilkunastu uczniów i gotowe wzory, do których wystarczyło podstawić odpowiednie dane? Czy też żmudne wieloetapowe analizy uczniów, którzy także chcieli obliczyć powierzchnię kostki Mengera, i którzy „uruchomili" swoją wyobraźnię przestrzenną? Odpowiedź mogła być jedna – przede wszystkim należało zweryfikować modelową punktację i przyjąć taką, która zrównywałaby oba typy rozwiązań do pewnego poziomu. Czyli za podanie gotowego wzoru i przeprowadzenie obliczeń lub wyliczenie „na piechotę" powierzchni kolejnej kostki uczeń mógł uzyskać 6 punktów na 10 możliwych.

Natomiast zadania etapu powiatowego dla uczniów szkół ponadpodstawowych nie sprawiły im wielu problemów.

Wśród zadań **dla szkół ponadpodstawowych było zadanie 3 bardziej o charakterze praktycznym** – dany był skwer w kształcie kwadratu, do obsadzenia begoniami i bratkami oraz obsiania trawą. Części skweru wydzielono, kreśląc z każdego wierzchołka skweru łuki, równe długości boku kwadratu, dzieląc w tej sposób skwer na 9 różnych części. Należało obliczyć, jaką powierzchnię będą miały poszczególne części skweru. Większość uczniów ponumerowała te części – jedna część centralna, 4 części przylegające do niej i 4 części „zewnętrzne". Następnie przeprowadzono analizę, budując układ równań, którego zmiennymi były części ponumerowane. Niewiele było natomiast rozwiązań klasycznych, wykorzystujących np. funkcje trygonometryczne, podobieństwo, twierdzenie Pitagorasa.

W końcowych obliczeniach tego zadania należało uwzględnić podane w zadaniu przybliżenia: i . A to już w wielu pracach uczniów prowadziło do błędów rachunkowych w działaniach na ułamkach zwykłych i dziesiętnych.

Zadania na etapie wojewódzkim

W tegorocznej edycji Pomorskiej Ligi Zadaniowej na etapie wojewódzkim pojawiły się 2 zadania weryfikujące strategię myślenia uczniów na etapie powiatowym. Nawiązywały one do zadania o kostce Mengera (szkoła podstawowa) i zadania praktycznego ze skwerem (szkoła ponadpodstawowa) – były to odpowiednio zadanie 4 SP i zadanie 3 PP.

Wskaźniki łatwości dla tych zadań mogą być zaskakujące.

Poniższa tabela pokazuje, które z zadań były łatwiejsze, a których zadań nie wszyscy uczniowie podjęli się rozwiązywać.

Tabela 3. Dane dotyczące uczniów klasy 7 i 8 szkoły podstawowej oraz uczniów szkół ponadpodstawowych [PLZ 2022/2023 – etap wojewódzki]

	Zadanie 1	Zadanie 2	Zadanie 3	Zadanie 4	Zadanie 5
Szkoła Podstawowa (klasy 7 i 8) Piszących na etapie wojewódzkim – 47 uczniów	47*) 0,58**) 0,58***)	44*) 0,39**) 0,42***)	47*) 0,47**) 0,47***)	43*) 0,33**) 0,36***)	40*) 0,17**) 0,20***)
Szkoła ponadpodstawowa i ponadgimnazjalna Piszących na etapie wojewódzkim – 46	45*) 0,28**) 0,28***)	45*) 0,49**) 0,50***)	42*) 0,45**) 0,50***)	41*) 0,29**) 0,33***)	31*) 0,04**) 0,05***)

*) – liczba uczniów, którzy podjęli się rozwiązywania tego zadania
**) – wskaźnik łatwości zadania w odniesieniu do wszystkich piszących
***) – wskaźnik łatwości zadania tylko w odniesieniu do uczniów, którzy podjęli się rozwiazywania tego zadania

W zadaniu 4 dla szkół podstawowych na etapie wojewódzkim znów chodziło o kostkę Mengera, do której doczepiono w narożach każdej ściany kostkę o krawędzi 3 razy mniejszej. Na niższy wynik miało wpływ złe zrozumienie treści zadania. Wielu uczniów było przekonanych, że z naroży kostki Mengera wyjęto sześcianik, a w to miejsce wstawiono kostkę o krawędzi 3 razy mniejszej. Jeżeli powierzchnie większej i mniejszej kostki były poprawnie obliczone, to tę błędną interpretację treści zadania należało uwzględnić jako pozytywny element rozwiązania.

Jeśli porównamy wskaźniki wszystkich zadań z etapu wojewódzkiego dla szkół ponadpodstawowych, to właśnie **zdanie 3 dla szkół ponadpodstawowych** miało najlepszy wskaźnik łatwości. Można przypuszczać, że **właśnie** „trening” nad podobnym zadaniem z etapu powiatowego przyczynił się do tego, że to zadanie 3 miało najlepszy wynik.

Absolutnym zaskoczeniem były rozwiązania **zadania 1 dla szkół ponadpodstawowych**, które w modelowym schemacie rozwiązania uznane było jako najłatwiejsze. W zadaniu tym należało obliczyć prawdopodobieństwo, że na zegarze w postaci ☐☐ **:** ☐☐ w formacie 24-godzinnym na ekranie telefonu komórkowego pokazywany będzie czas, w którym wystąpią różne cyfry. Jednym z błędów było niezauważenie, że w formacie tym nie ma godziny 24:00 czyli że nie ma tez godziny 24:01 itd., a minutę przed północą mamy godzinę 23:59, po której już jest godzina 0:00, jak też niezauważenie, że żadna z pełnych godzin nie jest np. w postaci 14:60. W poprawnych rozwiązaniach przedstawiono 2 metody – zmiany oczekiwanego czasu względem np. pełnych godzin lub względem dziesiątków godzin (0,1,2).

Z kolei **zadanie 5 dla szkół ponadpodstawowych** o dwóch kulach, na których opisano stożek, a potem poprowadzono przekroje stożka dwiema płaszczyznami równoległymi do podstawy, pokazało po raz kolejny, **że uczniowie posiadają słabą wyobraźnię przestrzenną i nie potrafią zobrazować graficznie problemu**.

Całość do przeczytania: *https://tiny.pl/chn8p*

MATEMATYKA

Jerzy Paczkowski
Ekspert Pomorskiej Ligi Zadaniowej *Zdolni z Pomorza* w zakresie matematyki. Nauczyciel dyplomowany, doradca metodyczny z matematyki, a następnie konsultant ODN ds. diagnozy i edukacji matematycznej w latach 1993-2018. Nauczyciel matematyki w szkole podstawowej i w szkole średniej. Egzaminator egzaminów maturalnych i gimnazjalnych z matematyki. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Edukacyjnej.