dr Irena Domnik, dr Zofia Lewandowska

Po pierwsze liczby pierwsze

23 kwietnia 2024 roku odbył się **FINAŁ LIGI MATEMATYCZNEJ IM. ZDZISŁAWA MATUSKIEGO** organizowanej przez Pracowników Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych we współpracy z I Liceum Ogólnokształcącym im. Bolesława Krzywoustego w Słupsku. Była to już XXIII edycja tego prestiżowego ogólnopolskiego konkursu matematycznego dla uczniów szkół podstawowych i ponadpodstawowych. Z każdym rokiem szkolnym rozrasta się rodzina szkół i uczniów biorących udział w rozgrywkach ligowych. W tegorocznej edycji konkursu uczestniczyło 1074 uczniów: 724 z klas IV, V i VI szkoły podstawowej, 284 z klas VII i VIII szkoły podstawowej oraz 66 ze szkoły ponadpodstawowej. Finalistami zostało 195 uczniów: 79 z klas IV, V i VI szkoły podstawowej, 74 z klas VII i VIII szkoły podstawowej oraz 42 w kategorii szkoły ponadpodstawowej. Tytuł Laureata XXIII Ligi Matematycznej nadano 56 uczniom: 23 w kategorii szkoła podstawowa klasy IV-VI, 16 w kategorii szkoła podstawowa klasy VII-VIII oraz 17 w kategorii szkoła ponadpodstawowa.

Liga Matematyczna jest konkursem wieloetapowym, towarzyszącym uczniom przez prawie cały rok szkolny. Ma ciekawą strukturę, a początkowe etapy pozwalają na rozwiązywanie zadań w domu. W ten sposób na etapie pierwszym młodzi entuzjaści matematyki mogą korzystać z pomocy rodziców i nauczycieli, przedyskutować rozwiązania z kolegami lub poszukać analogicznych zadań w zbiorach zadań. Następne etapy konkursu rozgrywane w warunkach kontrolowanej samodzielności pozwalają sprawdzić poziom przyswojonej wiedzy. Wielkim atutem konkursu są ciekawe, intrygujące, nieszkolne zadania dostosowane do poziomu każdej kategorii wiekowej. Organizatorki Ligi Matematycznej starają się, by w każdej edycji była grupa zadań poświęcona wybranemu zagadnieniu. W tym roku w roli głównej wystąpiły liczby pierwsze – liczby spełniające istotną rolę w zagadnieniach teorii podzielności liczb naturalnych.

Niech N={1,2,3,…} oznacza zbiór liczb naturalnych. Liczbę naturalną n nazywamy pierwszą, jeżeli ma dokładnie dwa dzielniki 1 i n. Każdą liczbę naturalną większą od 1, która nie jest pierwsza, nazywamy złożoną. Liczba 1 nie jest ani pierwsza, ani złożona. Często mówi się, że 1 jest najbardziej samotną liczbą naturalną. Liczba 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą, pozostałe liczby pierwsze są nieparzyste. Początkowe liczby pierwsze to
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, …

Dwie liczby pierwsze różniące się o 2 nazywamy liczbami bliźniaczymi. Są nimi na przykład 11 i 13, 17 i 19, 41 i 43. Zauważmy, że w zbiorze liczb naturalnych liczby pierwsze nie są rozmieszczone regularnie, a odległość między kolejnymi liczbami pierwszymi może być dowolnie duża. Na przykład nie istnieją żadne liczby pierwsze większe niż 101!+1 i mniejsze niż 101!+102, bo każda liczba postaci 101!+k, gdzie $k \in \{2,3,4,\ldots,101\}$ jest złożona. Stąd też wszystkie próby znalezienia uniwersalnego wzoru na wyznaczanie liczb pierwszych skończyły się niepowodzeniem, a zmierzyli się z tym zagadnieniem najwięksi matematycy, m.in. Euler, Fermat, Legendre. Wciąż najbardziej znanym sposobem wyznaczania liczb pierwszych jest sito Eratostenesa z Cyreny pochodzące z III wieku p.n.e. Matematyk ze Lwowa Jacob Kulik (XIX w.) wyznaczył kolejne liczby pierwsze aż do 100 milionów. Zauważmy, że dokonał tego bez użycia kalkulatora i komputera. Pracował nad tym problemem 20 lat.

Z liczbami pierwszymi związane jest zasadnicze twierdzenie algebry: każda liczba naturalna złożona jest iloczynem liczb pierwszych. A zatem każda liczba naturalna większa od 1 daje się przedstawić w postaci iloczynu skończonej ilości liczb pierwszych. Matematyk grecki Euklides (IV w. p.n.e.) udowodnił, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Co jakiś czas dowiadujemy się o odkryciu nowej liczby pierwszej. Aktualnie największą znaną liczbą pierwszą jest 51 liczba pierwsza Mersenne'a: $2^{82589933} - 1$ odkryta 7 grudnia 2018 roku. Jej zapis dziesiętny liczy 24 862 048 cyfr.

Niezmiernie interesujące są dwie własności opisujące liczby naturalne za pomocą liczb pierwszych i złożonych.

WŁASNOŚĆ 1. Każda liczba naturalna większa od 5 jest sumą liczby pierwszej i złożonej.

Aby to wykazać, rozważmy dwa przypadki. Jeżeli n jest naturalną liczbą parzystą większą niż 5, to $n=2k$, gdzie k jest liczbą naturalną większą niż 2. Wtedy n=2+2(k-1). Ponieważ k-1>1, więc n jest sumą liczby pierwszej 2 i liczby złożonej 2(k-1). Gdy n jest liczbą nieparzystą większą niż 5, to n=2k+1, gdzie k>2. Wtedy n=3+2(k-1),k-1>1. Zatem liczbę n można przedstawić jako sumę liczby pierwszej 3 i złożonej 2(k-1).

WŁASNOŚĆ 2. Każda liczba naturalna większa od 10 jest sumą trzech liczb: dwóch różnych liczb pierwszych i jednej złożonej.

Istotnie. Rozważmy teraz liczbę naturalną n większą niż 10 oraz dwa przypadki ze względu na parzystość liczby n. Jeżeli n=2k, gdzie k>5 to n=3+5+2(k-4), gdzie k-4>1. Zatem n jest sumą dwóch liczb pierwszych 3 i 5 oraz jednej złożonej 2(k-4). Jeżeli n=2k+1, gdzie k>4, to n=2+3+2 (k-2),k-2>2.

Liczby pierwsze, tak proste z definicji, są często tematem trudnych, ale interesujących zadań konkursowych i olimpijskich. Poniżej prezentujemy wybrane zadania z ostatnich edycji Ligi Matematycznej związane z liczbami pierwszymi, wraz z rozwiązaniami.

ZADANIE 1 (XXIII LM, Szkoła Podstawowa, klasy VII-VIII, półfinał 2024)
Czy można utworzyć dziewięciocyfrowy kod używając trzykrotnie każdej z cyfr 1, 3, 5 w taki sposób, aby powstała dziewięciocyfrowa liczba pierwsza? Odpowiedź uzasadnij.
ROZWIĄZANIE. NIE. Zauważmy, że suma cyfr liczby utworzonej z trzech cyfr 1, trzech cyfr 3 i trzech cyfr 5 jest równa 27, więc ta liczba dziewięciocyfrowa dzieli się przez 3 i 9. Zatem niezależnie od ułożenia cyfr liczba ta jest złożona.

ZADANIE 2 (XXII LM, Szkoła Podstawowa, klasy VII-VIII, finał 2023)
Czy liczbę 999 999 995 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych? Odpowiedź uzasadnij.
ROZWIĄZANIE. Liczba 999 999 995 jest nieparzysta, więc będzie sumą liczby parzystej i nieparzystej. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, więc 999 999 995=2+999 999 993. Ale sumą cyfr liczby 999 999 993 jest 75, więc ta liczba dzieli się przez 3. Zatem nie jest liczbą pierwszą. W konsekwencji nie jest możliwe przedstawienie liczby 999 999 995 jako sumy dwóch liczb pierwszych.

ZADANIE 3 (XXIII LM, Szkoła Ponadpodstawowa, październik 2023)
Znajdź największą trzycyfrową liczbę pierwszą p taką, że suma jej cyfr jest dwucyfrową liczbą pierwszą q, a suma cyfr liczby q jest jednocyfrową liczbą pierwszą r.
ROZWIĄZANIE. Suma cyfr liczby trzycyfrowej jest równa co najwyżej 3·9. Istnieje pięć dwucyfrowych liczb pierwszych nie większych niż 27: 11, 13, 17, 19, 23. Policzmy kolejno sumy cyfr tych liczb: 2, 4, 8, 10, 5. Zatem jedyne możliwości to 11 i 23. Największa trzycyfrowa liczba pierwsza o sumie cyfr 23 jest równa 977, a o sumie cyfr 11 – 911. W rezultacie największą trzycyfrową liczbą pierwszą jest 977, suma jej cyfr jest dwucyfrową liczbą pierwszą 23, a suma cyfr tej liczby jest jednocyfrową liczbą pierwszą 5.

ZADANIE 4 (XXIII LM, Szkoła Ponadpodstawowa, listopad 2023)
Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych takie, że pq-1 i pq+1 też są liczbami pierwszymi.
ROZWIĄZANIE. Skoro pq-1 oraz pq+1 mają być liczbami pierwszymi, to jednocześnie nie mogą być nieparzyste. Istotnie, gdyby obie były nieparzyste, to iloczyn pq też byłby nieparzysty, więc pq-1 oraz pq+1 byłyby parzystymi liczbami pierwszymi, co jest niemożliwe. W rezultacie jedna z liczb p, q jest parzysta, a druga nieparzysta. Dla ustalenia uwagi niech q=2. Wtedy p jest nie większe niż 3. To wynika z faktu, że spośród kolejnych liczb 2p-1, 2p, 2p+1 dokładnie jedna jest podzielna przez 3. W przypadku p>3, jedna z liczb 2p-1, 2p, 2p+1 byłaby złożona. Jeżeli p jest liczbą pierwszą nie większą niż 3, to p=2 lub p=3. W rezultacie dostajemy trzy rozwiązania:

1. p=2, q=2, bo pq-1=3 oraz pq+1=5 są liczbami pierwszymi;
2. p=2, q=3, bo pq-1=5 oraz pq+1=7 są liczbami pierwszymi;
3. p=3, q=2, bo pq-1=5 oraz pq+1=7 są liczbami pierwszymi.

ZADANIE 5 (XXIII LM, Szkoła Ponadpodstawowa, grudzień 2023)
Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q takie że, p^q+q^p jest liczbą pierwszą.
ROZWIĄZANIE. Ponieważ p^q+q^p ma być liczbą pierwszą, więc będzie to liczba nieparzysta. Zatem będzie sumą liczby parzystej i nieparzystej. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, więc p=2 lub q=2. Bez utraty ogólności załóżmy, że p=2, q jest liczbą pierwszą nieparzystą. Zauważmy, że
$2^q+q^2=(2^q+1^q)+(q^2-1^q)=(2+1)(2^{q-1}-2^{q-2})+\cdots+1)+(q-1)(q+1)=3\cdot(2^{q-1}-2^{q-2}+\cdots+1)+(q-1)(q+1)$.

Możliwe są przypadki:

(1) q jest liczbą podzielną przez 3, więc jako liczba pierwsza jest równa 3. Wtedy $2^3+3^2=8+9=17$ jest liczbą pierwszą.
(2) Liczba q przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Wówczas q-1 jest podzielne przez 3 oraz 2^q+q^2 jest podzielne przez 3, co jest niemożliwe, bo $2^q+q^2>3$ jest liczbą pierwszą.
(3) Liczba q przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Wówczas q+1 jest podzielne przez 3 oraz 2^q+q^2 jest podzielne przez 3, co jest niemożliwe, bo jest

$2^q+q^2>3$ liczbą pierwszą.

W konsekwencji (p=2, q=3) lub (p=3, q=2).

ZADANIE 6 (XXII) LM, Szkoła Ponadpodstawowa, finał 2023)

Liczby naturalne p, q, gdzie $p<q$, są kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Wykaż, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

ROZWIĄZANIE. Zauważmy, że liczby pierwsze p i q są nieparzyste. Zatem ich średnia arytmetyczna $\frac{p+q}{2}$ jest liczbą naturalną taką, że $p<\frac{p+q}{2}<q$.

Ponieważ z założenia p i q są kolejnymi liczbami pierwszymi, więc liczba $\frac{p+q}{2}$ jest złożona, czyli jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych. Z równości $p+q=2\cdot\frac{p+q}{2}$ wynika, że jest iloczynem co najmniej trzech liczb naturalnych (niekoniecznie różnych).

ZADANIE 7 (XXIII LM, Szkoła Ponadpodstawowa, finał 2024)

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2-2q^2=1$.

ROZWIĄZANIE. Niech p i q będą liczbami pierwszymi. Zauważmy, że

$$p^2-1=2q^2$$
$$(p-1)(p+1)=2qq.$$

Wobec tego p jest liczbą nieparzystą, bo $2q^2$ jest liczbą parzystą. Stąd p-1 oraz p+1 są kolejnymi liczbami parzystymi oraz jedna jest podzielna przez 2, a druga przez 4. W konsekwencji lewa strona jest podzielna przez 8, więc prawa też. Stąd wynika, że q jest liczbą podzielną przez 2. Wobec tego q=2, p=3.

Zapraszamy do udziału w XXIV edycji konkursu uczniów szkół podstawowych i ponadpodstawowych.

dr Irena Domnik
Nauczyciel akademicki Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytetu Pomorskiego w Słupsku. Współorganizatorka XXIII edycji konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami" oraz pięciu tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami"

dr Zofia Lewandowska
Dyrektorka Instytutu Nauk Ścisłych i Technicznych Uniwersytetu Pomorskiego w Słupsku. Współorganizatorka XXIII edycji konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami" oraz pięciu tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami".