dr Irena Domnik, dr Zofia Lewandowska

Parzyste czy nieparzyste? – oto jest pytanie

„Dobry Bóg stworzył liczby naturalne, wszystkie inne są dziełem człowieka”
L. Kronecker

Zakończyła się XXII edycja Ligi Matematycznej im. Zdzisława Matuskiego w roku szkolnym 2022/2023. Motywem przewodnim tegorocznych zadań była parzystość i nieparzystość – bardzo przydatny niezmiennik często występujący w zadaniach konkursowych. Ogólnie: niezmiennikiem nazywamy własność, która nie zmienia się, gdy wielokrotnie stosujemy pewną operację. Zauważenie niezmiennika znacznie ułatwia rozwiązanie zadania. W tym artykule przedstawiamy rozwiązania wybranych zadań z tegorocznych zestawów ligowych wykorzystujących parzystość/ nieparzystość liczb.

Liczbę całkowitą nazywamy parzystą, jeżeli dzieli się przez 2, w przeciwnym przypadku liczbę nazywamy nieparzystą. Wiadomo, że suma dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą, suma dwóch liczb nieparzystych też jest liczbą parzystą. Natomiast suma liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą nieparzystą. Ponadto suma parzystej liczby liczb nieparzystych jest liczbą parzystą, a suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą. Iloczyn liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą. Iloczyn liczb całkowitych zawierających co najmniej jedną liczbę parzystą, jest liczbą parzystą. Kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą, a kwadrat liczby nieparzystej pozostaje nieparzysty. Te proste własności zastosowano w rozwiązaniach zadań.

ZADANIE 1 (szkoła podstawowa, kl. VII-VIII, październik 2022)

Dwudziestu trzech uczniów klasy VII wyjeżdżając na wakacje postanowiło pisać do siebie wiadomości tekstowe. Pewnego dnia każdy z nich wysłał dwie lub cztery wiadomości. Czy każdy uczeń mógł tego dnia otrzymać dokładnie trzy wiadomości?

ROZWIĄZANIE. NIE. Dwudziestu trzech uczniów wysłało po 2 lub 4 wiadomości, więc wysłało parzystą ich liczbę. Natomiast liczba otrzymanych sms-ów jest równa 23·3=69, więc jest nieparzysta.

ZADANIE 2
(szkoła podstawowa, kl. VII-VIII, listopad 2022)

W kratkach tablicy o wymiarach 9x17 rozmieszczono liczby naturalne tak, że w każdym prostokącie o wymiarach 3 x 1 suma liczb jest nieparzysta. Czy suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy jest parzysta?

ROZWIĄZANIE. NIE. Tablica 9x17 zawiera 51 prostokątów o wymiarach 3x1. Ponieważ suma liczb w każdym takim prostokącie jest nieparzysta, więc suma wszystkich liczb zapisanych na tablicy jest również nieparzysta.

ZADANIE 3
(szkoła podstawowa, kl. VII-VIII, grudzień 2022)

Czy liczbę 55555553 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych?

ROZWIĄZANIE. NIE. Przypuśćmy, że uda się to zrobić. Ponieważ liczba 55555553 jest nieparzysta, więc musi być sumą liczby parzystej i nieparzystej oraz obie będą liczbami pierwszymi. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2. Zatem drugą liczbą rozkładu jest 55555551, ale ta liczba jest złożona. Rzeczywiście, suma cyfr jest równa 36, więc liczba dzieli się przez 3 i 9. W rezultacie przedstawienie liczby 55555553 w postaci sumy dwóch liczb pierwszych jest niemożliwe.

ZADANIE 4
(szkoła podstawowa, kl. VII-VIII, półfinał, marzec 2023)

Czy sto długopisów można rozdzielić między 25 uczniów tak, aby żaden z nich nie otrzymał parzystej liczby długopisów?

ROZWIĄZANIE. NIE. Gdyby każdy uczeń dostał nieparzystą liczbę długopisów, to w sumie nie mogliby otrzymać 100 długopisów, bo suma 25 liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

ZADANIE 5
(szkoła ponadpodstawowa, październik 2022)
Czy istnieją liczby całkowite x,y,z takie, że $(3x - 5y)(7y - 3z)(3z - x) = 20222023$?

ROZWIĄZANIE. NIE. Prawa strona równania jest liczbą nieparzystą. Aby iloczyn po lewej stronie był nieparzysty, wszystkie trzy czynniki muszą być nieparzyste. Zatem ich suma też będzie nieparzysta. Sprawdźmy tę sumę: $(3x - 5y) + (7y - 3z) + (3z - x) = 2x + 2y = 2(x + y)$

.Jest liczbą parzystą. Wobec tego takie liczby całkowite nie istnieją.

ZADANIE 6

(szkoła ponadpodstawowa, listopad 2022)

Na tablicy wypisano liczby 1, 2, 3 ...,10. Ruch polega na wybraniu trzech liczb *a, b, c* i zastąpieniu ich liczbami $2a + b$, $2b + c$, $2c + a$. Czy po wykonaniu pewnej liczby takich operacji na tablicy otrzymamy dziesięć równych liczb?

ROZWIĄZANIE. NIE. Sumą liczb naturalnych od 1 do 10 jest 55. Wykażemy, że wykonanie operacji nie zmienia parzystości tej sumy. Gdy wybierzemy trzy liczby: *a, b, c* to po wykonaniu ruchu dostajemy liczby $2a + b$, $2b + c$, $2c + a$, których suma jest równa $(2a + b) + (2b + c) + (2c + a) = 3a + 3b + 3c$. Zatem suma wszystkich liczb na tablicy zwiększy się o $(3a + 3b + 3c) – (a + b + c)$. Ponieważ $(3a + 3b + 3c) – (a + b + c) = 2(a + b + c)$ więc zwiększy się o liczbę parzystą. Wtedy suma pozostanie nieparzysta. W konsekwencji po wykonaniu pewnej liczby operacji nie jest możliwe uzyskanie 10 równych liczb, bo ich suma byłaby liczbą parzystą.

ZADANIE 7

(szkoła ponadpodstawowa, grudzień 2022)

Czy istnieją takie liczby całkowite *a, b, c, t*, że $x + y + z + t = 2023$ i $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$?

ROZWIĄZANIE. NIE. Zauważmy, że suma czterech liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą, gdy trzy z nich są parzyste i jedna nieparzysta lub jedna parzysta i trzy nieparzyste. Wtedy drugi warunek nie jest spełniony, bo po jednej stronie suma kwadratów dwóch liczb będzie parzysta, a po drugiej nieparzysta. W rezultacie takie liczby nie istnieją.

ZADANIE 8

(szkoła ponadpodstawowa, grudzień 2022)

Na tablicy napisano liczby naturalne od 1 do 10. Czy można umieścić między nimi znaki plus oraz minus w taki sposób, aby otrzymać 0?

ROZWIĄZANIE. NIE. Sumą liczb naturalnych od 1 do 10 jest 55. Załóżmy, że na początku między tymi liczbami znajdują się znaki „plus". Zauważmy, że zastępując w sumie $a + b$ znak „plus" na „minus," wartość tej sumy zmniejsza się o $2b$, bo $(a + b) – 2b = a – b$. To oznacza, że zastępując znaki „plus" „minusami" zawsze zmniejszamy liczbę nieparzystą 55 o liczbę parzystą, więc nigdy nie uzyskamy liczby parzystej 0.

ZADANIE 9

(szkoła ponadpodstawowa, styczeń 2023)

Liczby 1, 2, 3, …, 9 umieszczono na okręgu. Przez operację rozumiemy dodanie pewnej (tej samej) liczby całkowitej do dwóch wybranych sąsiednich liczb i umieszczenie tych sum na okręgu w miejsce poprzednich liczb. Czy po wykonaniu skończonej liczby takich operacji można otrzymać na okręgu dziewięć zer?

ROZWIĄZANIE. NIE. Początkowa suma wszystkich liczb na okręgu jest równa liczbie nieparzystej 45. Po każdej operacji suma liczb na okręgu będzie nadal nieparzysta, bo dodajemy dwa razy tę samą liczbę całkowitą, a więc suma tych liczb jest parzysta. W rezultacie po wykonaniu skończonej liczby operacji nie uzyskamy liczby parzystej 0.

ZADANIE 10

(szkoła ponadpodstawowa, finał 2023)

Czy istnieją liczby całkowite takie, że $|a^2 + b| + |a^2 – b| + |a + b^2| + |a–b^2| = 2023$?

ROZWIĄZANIE. NIE. Liczba 2023 jest liczbą nieparzystą, więc prawa strona równania jest nieparzysta. Rozważmy wartość lewej strony równania ze względu na parzystość *a* i *b*:

1. *a* i *b* są parzyste. Wtedy kwadraty liczb *a* i *b* są parzyste oraz suma i różnica liczb parzystych pozostaje parzysta. W rezultacie po lewej stronie mamy sumę czterech liczb parzystych, więc liczbę parzystą. Sprzeczność z wartością prawej strony równania.
2. *a* i *b* są nieparzyste. Wobec tego kwadraty tych liczb są też nieparzyste, a suma i różnica tych liczb są parzyste. Z lewej strony dostajemy sumę czterech liczb parzystych, czyli liczbę parzystą, co jest sprzeczne z nieparzystością prawej strony.
3. Liczby *a* i *b)* są różnej parzystości, tzn. jedna jest parzysta, a druga nieparzysta. Suma i różnica liczb różnej parzystości jest liczbą nieparzystą. Wówczas lewa strona jest sumą czterech liczb nieparzystych, a stąd liczbą parzystą. Sprzeczność.

A teraz kilka refleksji po lekturze rozwiązań uczniowskich z tegorocznej XXII edycji Ligi Matematycznej. Oczywiście, zadania konkursowe z niezmiennikiem w roli głównej więcej trudności sprawiają uczniom ze szkół podstawowych niż szkół ponadpodstawowych. Dla uczniów rozpoczynających zmagania w różnych konkursach matematycznych, zetknięcie się z zadaniami, w których występują niezmienniki, jest nowym doświadczeniem. Trzeba bowiem zmierzyć się z problemem niestandardowym, nieszkolnym, w którym istotniejsze od zastosowania konkretnego wzoru jest poprawne uzasadnienie i sformułowanie wniosku. Rozwiązania przy wykorzystaniu niezmiennika „parzystość/nieparzystość liczb całkowitych," zaskakują prostotą i skromnością. Zauważmy, że wszystkie wykorzystują proste i ogólnie znane własności liczb całkowitych parzystych i nieparzystych. Największym błędem występującym w rozwiązaniach zadań tego typu są usilne próby znalezienia konkretnych wartości liczbowych spełniających warunki zadania. Wymusza to rozważanie wielu przypadków i te rozwiązania przeważnie nie wyczerpują wszystkich możliwości. Na przykład w zadaniu 2, uczniowie pokazywali sposób rozmieszczenia liczb całkowitych na tablicy, aby uzyskać sumę nieparzystą w każdym prostokącie o wymiarach 3x1. Niestety, to tylko jedna z wielu możliwości, więc nie rozstrzyga o rozwiązaniu. W zadaniu 3 uczniowie często rozważali sumę dwóch liczb o ustalonych cyfrach jedności, aby w sumie otrzymać liczbę z cyfrą 3. Przyporządkowanie w zadaniu 4 wszystkim uczniom tej samej liczby długopisów (”po równo”) jest nadinterpretacją treści zadania, w którym nie zakładano, że należy rozdzielić długopisy w tej samej liczbie. Błędem często występującym w zadaniach na poziomie ponadpodstawowych jest wytrwałe poszukiwanie konkretnych rozwiązań podanych równań. Na przykład w zadaniu 5 rozkład liczby 20222023 na trzy czynniki, aby utworzyć układ trzech równań z trzema niewiadomymi, prowadzi do wielu przypadków. Warto zauważyć trochę przewrotnie, że gdy w treści zadania pojawia się liczba, często o dużej wartości, związana z aktualnym rokiem (zadanie 5, 7, 10), to trzeba pomyśleć o znalezieniu uzasadnienia biorącego pod uwagę jej własności, a nie wartość. Istotną własnością do wykorzystania w zadaniach o niezmiennikach jest nieparzysta suma podanych liczb (zadania 8, 9).

W następnej, już XXIII, edycji Ligi Matematycznej, z pewnością pojawią się równie interesujące i intrygujące zadania. Wybierzemy następny ciekawy motyw, a więc zagadnienie, które będzie pojawiać się w kolejnych zestawach zadań domowych, półfinałowych i finałowych. Zapraszamy do udziału w zmaganiach konkursowych uczniów szkół podstawowych i ponadpodstawowych.

dr Irena Domnik
Nauczyciel akademicki z 36-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami” oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami”.

dr Zofia Lewandowska
Nauczyciel akademicki z 34-letnim stażem pracy. Współorganizatorka konkursu Liga Matematyczna im. Zdzisława Matuskiego. Współautorka „Zbioru zadań z topologii ogólnej z rozwiązaniami” oraz czterech tomów „Zostań mistrzem matematyki. Zbiór zadań z ligi matematycznej z rozwiązaniami”.

NA ZDROWIE

Rozpoczęła się ogólnopolska kampania społeczna „Na zdrowie” stanowiąca element Narodowego Programu Zdrowia na lata 2021-2025. Zainicjowana została przez Krajowe Centrum Przeciwdziałania Uzależnieniom i jest prowadzona przez Fundację Poza Schematami. Celem kampanii jest wzrost wiedzy na temat negatywnego wpływu alkoholu na zdrowie fizyczne, psychiczne i społeczne.

Adresatami są osoby dorosłe, a poszczególne treści odnoszą się do wybranych odbiorców: rodziców, kobiet w ciąży, seniorów.

Zachęcamy do odwiedzenia strony kampanii „Na zdrowie”, opracowanej przez uznanych specjalistów z różnych dziedzin nauki. Jest tam wiele istotnych informacji na temat wpływu alkoholu na zdrowie fizyczne i psychiczne.

Od czego zacząć?

WIĘCEJ INFORMACJI NA STRONIE:
kampanianazdrowie.pl


Ja, alkohol i inni


Zdrowie fizyczne


Zdrowie psychiczne


Fakty i mity

STRONA KAMPANII

Grafika i informacja ze strony: https://kampanianazdrowie.pl/